Συμπερασματολογία για τις διακυμάνσεις

(A) Μια διακύμανση (χ^2 - τεστ)

Πχ. 4.7

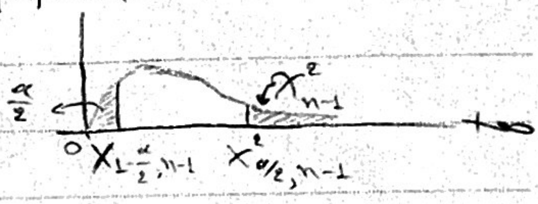
4.2 , 5.3 , 10.3 || $\sigma = 2$; ($\alpha = 0,05$)

Γενικά

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$. Ενδιαφέρει το σ^2

$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ κ $E(S^2) = \sigma^2$ (αμερόληπτη)

Γνωρίζουμε ότι: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$



Για να δημιουργήσουμε ένα $(1-\alpha)100\%$ ΔΕ για το $\sigma^2(\sigma)$:

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$P\left(\underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}}_{L} \le \sigma^2 \le \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}_{U}\right) = 1-\alpha$$

Για να ελέγξουμε υποθέσεις της μορφής:

(i) $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$ και $H_\alpha: \sigma^2 > \sigma_0^2$ (i) $X^2 \ge \chi^2_{\alpha,n-1}$

(ii) $H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$ και $H_\alpha: \sigma^2 < \sigma_0^2$ (ii) $X^2 \le \chi^2_{1-\alpha,n-1}$

(iii) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ και $H_\alpha: \sigma^2 \ne \sigma_0^2$ (iii) $X^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ κ $X^2 \ge \chi^2_{\alpha/2,n-1}$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ όταν H_0: αληθής κ κριτήριο περιοχής κτλ.

Στο παράδειγμα: $H_0: \sigma = 2$ και $H_\alpha: \sigma \ne 2$ άρα

άρα $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{2 * 105.7}{4} = 5,285$ άρα $S^2 = 10.57$

$\chi^2_{0.975,2} = 0,0506$

$\chi^2_{0.025,2} = 7,378$

Επειδή, $0.0506 \le 5.285 \le 7.378$

δεν μπορούμε να απορρίψουμε τον ισχυρισμό

(B) Δύο διακυμάνσεις (F-τεστ)

Πχ. 4.8

A: $n_1 = 10$, $S_1^2 = 1.25$

B: $n_2 = 8$, $S_2^2 = 0.28$

Υπάρχει διαφορά; ($\alpha = 0.10$)

Γενικά

Έστω $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$ τ.δ. από πληθ. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ κ

$X_{21}, \dots, X_{2n_2}$ τ.δ. από άλλο πληθ. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Ενδιαφέρει η σύγκριση των σ_1^2 κ σ_2^2.

Θυμίζω: από

$$\left.\begin{aligned} \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} &\sim \chi^2_{n_1-1} \\ \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} &\sim \chi^2_{n_2-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

Για τον έλεγχο των υποθέσεων:

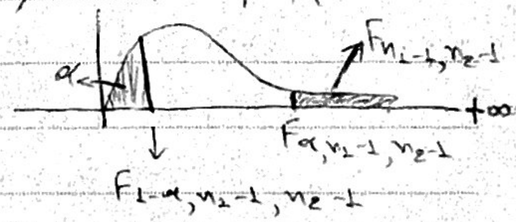
(i) $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ και $H_\alpha: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (i) $F \geq F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$

(ii) $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ και $H_\alpha: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (ii) $F \leq F_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$

(iii) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ και $H_\alpha: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (iii) $F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}$ κ $F \geq F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$ όταν H_0 αληθεύει και για επίπεδο σημαντικότητας α, οι κρ. περιοχές



Για το παράδειγμα

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ και $H_\alpha: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1.25}{0.28} = 4,46$$ και

κρ. περιοχή: $F \leq F_{0.95, 9, 7}$ κ $F \geq F_{0.05, 9, 7} = 3.68$

Επειδή $4.46 > 3.68$ απορρ. η H_0

$$F_{\alpha, v_1, v_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha, v_2, v_1}}$$ άρα $$F_{0.95, 9, 7} = \frac{1}{F_{0.05, 7, 9}} = \frac{1}{3.29} = 0,3$$

Ασκ. 4.4

$4, \; 5, \; 6$

$\frac{1}{3}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{1}{3}$

$L = \bar{x} - \frac{1}{2}\sigma_{\bar{x}}^2$

$U = \bar{x} + \frac{1}{2}\sigma_{\bar{x}}^2$

Β.σ. ; $n=2 \rightsquigarrow (1-\alpha)100\% = \frac{3}{9}100\% = 33{,}3\%$

$\mu = E(x) = \frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 5 + \frac{1}{3}\cdot 6 = 5$

$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2 = \frac{77}{3} - 25 = \frac{2}{3}$

$E(x^2) = \frac{1}{3}4^2 + \frac{1}{3}5^2 + \frac{1}{3}6^2 = \frac{77}{3}$

$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{2} = \frac{2/3}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$L = \bar{x} - \frac{1/3}{2} = \bar{x} - \frac{1}{6}$

$U = \bar{x} + \frac{1}{6}$

Δυνατά δείγματα	(L, U)	$\ni \mu$?
$(4,4)$	$4 \pm \frac{1}{6}$	όχι
$(4,5)$	$4{,}5 \pm \frac{1}{6}$	όχι
$(4,6)$	$5 \pm \frac{1}{6}$	ναι
$(5,4)$	$4{,}5 \pm \frac{1}{6}$	όχι
$(5,5)$	$5 \pm \frac{1}{6}$	ναι
$(5,6)$	$5{,}5 \pm \frac{1}{6}$	όχι
$(6,4)$	$5 \pm \frac{1}{6}$	ναι
$(6,5)$	$5{,}5 \pm \frac{1}{6}$	όχι
$(6,6)$	$6 \pm \frac{1}{6}$	όχι

Ασκ. 4.7

Έστω $X_1, \dots, X_9$ τ.δ. από $N(\mu, 1)$

$H_0: \mu = 20$ και $H_a: \mu = 21{,}5$

απορρ. H_0 αν: $\bar{x} \geq 21$

$\alpha, \; \beta, \; \gamma = 1 - \beta$;

$\alpha = P(\text{απορρ. } H_0 \mid \text{αληθ. } H_0) = P(\bar{x} \geq 21 \mid X_i \sim N(\mu = 20, \sigma^2 = 1)) =$

$= P(\bar{x} \geq 21 \mid \bar{x} \sim N(\mu = 20, \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{9})) = P\left[(Z =) \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}} (= \frac{\sigma}{\sqrt{n}})} \geq \frac{21 - 20}{\sqrt{1/9}}\right] =$

$= P(Z \geq 3) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 3) = 0{,}5 - 0{,}4987 = 0{,}0013 \; (= \alpha)$

$\beta = P(\text{δεχ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθεύει}) = P(\bar{x} \leq 21 \mid \mu = 21{,}5) =$

$= P(\bar{x} \leq 21 \mid \bar{x} \sim N(\mu = 21{,}5, \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{9})) = P\left[(Z =) \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \leq \frac{21 - 21{,}5}{\sqrt{1/9}}\right] =$

$= P(Z \leq -1{,}5) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 1{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668 \; (= \beta)$

$\gamma = 1 - \beta = \dots$

Άσκ. 4.16

$\bar{x}_1 = 1,07 \quad n_1 = 100 \quad \sigma_1 = 0,10$

$\bar{x}_2 = 1,18 \quad n_2 = 100 \quad \sigma_2 = 0,12$

(i) Υπάρχει διαφορά; $(\alpha = 0,05)$

(ii) $\mu_1 = \mu_2 + \delta$

Λύση

(i) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ και $H_\alpha: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό: $Z = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \overset{0 \text{ (όταν αληθεύει)}}{\cancel{(\mu_1 - \mu_2)}}}{\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

και κρ. περιοχής: $|Z| \geq Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$

$Z = -7,042$ & $7,042 > 1,96$ άρα απορρ. την H_0

(ii) $\mu_1 = \mu_2 + \delta$

$\beta = P(\text{δεχ. } H_0 \mid H_\alpha \text{ αληθεύει}) = P(-1,96 \leq Z \leq 1,96 \mid \mu_1 - \mu_2 = \delta) =$

$= P\left(-1,96 \leq Z = \left(\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) \leq 1,96 \;\middle|\; \mu_1 - \mu_2 = \delta\right) =$

$= P\left(-1,96 \leq \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq 1,96 \;\middle|\; \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \overset{\delta}{\cancel{(\mu_1 - \mu_2)}}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \overset{\text{κοθ}}{\sim} N(0,1)\right)$

$= P\left(-1,96 - \dfrac{\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq \underbrace{\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} - \dfrac{\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}_{N(0,1)} \leq 1,96 - \dfrac{\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$

$= P\left(-1,96 - \dfrac{\delta}{0,0156} \leq Z \leq 1,96 - \dfrac{\delta}{0,0156}\right) = \Phi(\;) - \Phi(\;)$